HG
Revidert april 2011

Oversikt over konfidensintervall i Econ 2130

Merk at denne oversikten ikke er ment å leses istedenfor framstillingen i Løvås, men som et supplement. Løvås inneholder mange verdifulle kommentarer og eksempler.

1 Generell innledning med noen presiseringer og et regneeksempel

La θ være en ukjent parameter (populasjons-størrelse) i en statistisk modell. Uttrykket "ukjent parameter" betyr at den "sanne" verdien av θ i populasjonen er ukjent. Når vi setter opp en statistisk modell (som representerer populasjonen vi trekker data fra og trekningsprosedyren), antar vi i utgangspunktet at modellen er sann for en viss (ukjent) verdi av parameteren θ og usann for alle andre verdier. Anførselstegnene rundt "sann" ovenfor skyldes at begrepet *sann parameterverdi* kun gir god mening i relasjon til populasjonen dersom forutsetningene som er foretatt i modellen er realistiske forutsetninger om populasjonen og måten data er trukket på.

La $\hat{\theta}$ være en aktuell estimator for θ, og $SE = SE(\hat{\theta})$ står for en eller annen estimert versjon av standardfeilen til $\hat{\theta}$. (**Husk (NB!) at hvis $\hat{\theta}$ er forventningsrett, er standardfeilen til $\hat{\theta}$ ikke noe annet enn standardavviket til $\hat{\theta}$, nemlig $\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\theta})}$.**)

Det viser seg at alle konfidensintervall (KI) i pensum (inklusivt regresjonsanalysen) - med et unntak i tabell 2 – koker ned til samme form:

$$\hat{\theta} \pm c \cdot SE(\hat{\theta})$$

der c er en kvantil bestemt av den valgte konfidensgraden. Denne kvantilen er som oftest fra $N(0,1)$-fordelingen og noen ganger fra t-fordelingen (se situasjon 2 i tabell 1 (. Med konfidensgraden $1-\alpha$, er for eksempel $c = z_{\alpha/2}$ (dvs $\alpha/2$-kvantilen i $N(0,1)$) i situasjon 1 og 3 i tabell 1 og i alle situasjoner i tabell 3.

Årsaken til at denne typen av KI er så vanlig er at det ofte finnes teoremer (som for eksempel sentralgrenseteoremet og regel 5.20 og andre lignende) som viser at estimatoren $\hat{\theta}$ er tilnærmet (i noen få tilfeller eksakt) normalfordelt, $\hat{\theta} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(\theta, \sqrt{\text{var}(\hat{\theta})}) = N(\theta, SE(\hat{\theta}))$. Dette innebærer (jfr. regel R1 i notat til kap. 5 om normalfordelingen) at

(*) $$\frac{\hat{\theta}-\theta}{SE(\hat{\theta})} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$$

(*) gjelder bare utvalgsstørrelsen (antall observasjoner) ikke er for liten (se eksempel 1 under). Løvås viser side 226 hvordan utsagnet (*) leder til konfidensintervallet formulert i **regel 6.7.** Dessverre er **regel 6.7** unødvendig snevert formulert hos Løvås med få anvendelser (det er få situasjoner der $\hat{\theta}$ er eksakt normalfordelt, men mange situasjoner der $\hat{\theta}$ er tilnærmet normalfordelt). Vi blir derfor nødt til å gi en modifisert reformulering av regel 6.7 for å gjøre den mer anvendelig:

Regel 6.7 (Løvås side 225) modifisert. (Konfidensintervall basert på normalfordelingen).

(a) Hvis estimatoren $\hat{\theta}$ er forventningsrett og *tilnærmet* normalfordelt med standardfeil $SE(\hat{\theta})$, vil følgende intervall være et *tilnærmet* $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall for θ

(**) $[\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\theta}),\ \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\theta})]$

Hvis $\dfrac{\hat{\theta}-\theta}{SE(\hat{\theta})}$ i (*) er eksakt normalfordelt, $N(0,1)$, vil intervallet ha eksakt konfidensgrad $1-\alpha$ (eller $100(1-\alpha)\%$).

(b) Videregående teoremer i sannsynlighetsteori viser at i situasjoner der standardfeilen, $SE(\hat{\theta}) = \sqrt{\text{var}(\hat{\theta})}$ er ukjent (dvs avhenger av ukjente parametre i modellen) så vil under generelle betingelser konfidensintervallet fortsatt ha konfidensgrad tilnærmet $100(1-\alpha)\%$ om standardfeilen byttes ut med en estimert versjon. Med andre ord, utsagnet (*) - og dermed (**) - gjelder fortsatt om $SE(\hat{\theta})$ nå står for estimert standardfeil.

(a) begrunnes som i Løvås side 226 der den eneste forskjellen er at det første likhetstegnet byttes ut med $\approx$:

$$1-\alpha \approx P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\hat{\theta}-\theta}{SE(\hat{\theta})} \le z_{\alpha/2}\right) = \cdots \text{ som i Løvås side 226 } \cdots = P\left(\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\theta}) \le \theta \le \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\theta})\right)$$

(b) bygger på videregående sannsynlighetsteori (delvis tatt opp i Stat2-kurset og mye brukt i økonometrisk teori) og som ikke behandles her i Stat1.

Eksempel 1 (Basert på oppgave 5.6 i Løvås med ny problemstilling). En spesialpedagog skal undersøke læreevnen til $n = 900$ tilfeldig utvalgte elever. I oppgave 5.6 antas at andelen av alle skolebarn (populasjonen) som har lærevansker, er $p = 0{,}15$, altså kjent. Vi skal nå i stedet anta at p er ukjent og at 0,15 er et estimat for p basert på utvalget av 900 elever. Vi er interessert i å beregne usikkerheten ved dette anslaget uttrykt ved et 95% konfidensintervall for p. For å komme noen vei, trenger vi en statistisk modell for populasjonen og utvalgsmetoden.

Modell. *La X være antall barn med lærevansker i et rent tilfeldig utvalg på* $n = 900$ *elever trukket fra populasjonen av alle skolebarn. Anta* $X \sim \text{bin}(n, p)$ *der p er andelen av skolebarn i populasjonen med lærevansker og antas ukjent.*

> **Merknad til modellen.** Merk at utvalget er forutsatt representativt. Dette ligger i forutsetningen om at utvalget er "rent tilfeldig" som ideelt sett (sjelden eksakt oppfylt i praksis, men ofte akseptabelt bra oppfylt) betyr at alle mulige utvalg på 900 fra populasjonen har samme sannsynlighet for å bli trukket ut.

Anta at pedagogen fant 135 barn med lærevansker i utvalget. Tallet 135 er nå å oppfatte som en observasjon av den stokastiske variabelen, *X*. Den vanlige estimatoren i denne modellen er $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$. Estimatet (dvs den observerte verdien $\hat{p}_{obs}$ basert på data) får vi ved å sette data inn i estimatoren, $\hat{p}_{obs} = \dfrac{135}{900} = 0{,}15$. Oppgaven er altså å beregne et konfidensintervall for den ukjente *p* med konfidensgrad (tilnærmet) 95%:

Om estimatoren $\hat{p}$ vet vi følgende ut fra teorien som er etablert i kurset til nå:

(a) $\hat{p}$ er forventningsrett.

[Begrunnelse: $E(\hat{p}) = E\left(\dfrac{X}{n}\right) = \dfrac{1}{n}E(X) = \dfrac{1}{n}np = p$]

(b) Standardfeilen for $\hat{p}$ er $SE(\hat{p}) = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

[Begrunnelse: $\text{var}(\hat{p}) = \text{var}\left(\dfrac{X}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}\text{var}(X) = \dfrac{1}{n^2}np(1-p) = \dfrac{p(1-p)}{n}$. Dermed $SE(\hat{p}) = \sqrt{\text{var}(\hat{p})} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$]

(c) $\hat{p}$ er tilnærmet normalfordelt, $\hat{p} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(E(\hat{p}), \sqrt{\text{var}(\hat{p})}) = N(p, SE(\hat{p}))$.

[Dette følger av regel 5.20 som sier at hvis $\sigma^2 = \text{var}(X) = np(1-p) \geq 5$ og p ikke er veldig nær 0 eller 1, så er X tilnærmet normalfordelt, $X \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(E(X), \sqrt{\text{var}(X)}) = N(np, \sqrt{np(1-p)})$. Siden $n = 900$, synes betingelsen klart å være oppfylt. Dermed kan vi bruke regel R1 (i notat til kap. 5) som viser at

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \cdot X \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N\left(\frac{1}{n} \cdot E(X),\ \frac{1}{n} \cdot SD(X)\right) = N\left(p,\ \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = N\left(p, SE(\hat{p})\right) \quad]$$

Av dette følger at den standardiserte $\hat{p}$, $\frac{\hat{p}-p}{SE(\hat{p})}$, er tilnæmet $N(0,1)$-fordelt. Nå er standardfeilen, $SE(\hat{p})$ ukjent siden p er ukjent. Dermed, når n er stor nok (slik at $\text{var}(X) = np(1-p) \geq 5$), vil i følge modifisert regel 6.7 **(b)** denne tilnærmelsen fortsatt være akseptabel om vi erstatter den ukjente standardfeilen med estimert standard feil $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. I tråd med notasjonen slik Løvås (og Excel og STATA og andre pakker) bruker den, lar vi nå $SE(\hat{p})$ stå for den *estimerte* versjonen. Utsagnet (*) blir i denne situasjonen dermed seende ut som

$$\frac{\hat{\theta}-\theta}{SE(\hat{\theta})} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$$

som gir et tilnærmet $(1-\alpha)100\%$ KI for p: $\hat{p} \pm z_{\alpha/2} SE(\hat{p}) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Med ønsket konfidensgrad 95% trenger vi kvantilen $z_{0,025} = 1,96$, og konfidensintervallet blir utregnet som

$$\hat{p}_{obs} \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_{obs}(1-\hat{p}_{obs})}{n}} = 0,15 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(0,15)(0,85)}{900}} = 0,15 \pm 0.02 = [0,13,\ \ 0,17]$$

Merknad 1. *Usikkerheten* ved anslaget $\hat{p}_{obs} = 0{,}15$ er således i dette eksemplet beregnet til $\pm 0{,}02$ (generelt $\pm z_{\alpha/2} SE(\hat{\theta})$). Vi ser dermed at begrepet "usikkerhet" ved en estimering ikke er noen absolutt størrelse. Den avhenger ikke bare av utvalgsstørrelse (n) og populasjonsvariansen (her $p(1-p)$ som er variansen for antall suksesser i et enkelt binomisk forsøk), men også av den subjektivt valgte konfidensgraden!

Merknad 2. (For å berolige leseren). Om du til eksamen blir bedt om å beregne et konfidensintervall som i eksemplet, trenger du naturligvis ikke, om du ikke eksplisitt blir spurt om det, å komme opp med hele begrunnelsen ovenfor. Det vil vanligvis være tilstrekkelig simpelthen å velge riktig formel i forhold til den aktuelle modellen og å kunne sette inn tallene korrekt. Du kan naturligvis ved tilleggsspørsmål risikere å bli bedt om å gjennomføre deler av argumentasjonen ovenfor for aktuelle modell-typer som omfattes av pensum.

2 Aktuelle modelltyper 1

En vanlig modelltype er *uid*-modellen (engelsk *iid*)

(1) *La* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *være uavhengige og identisk fordelte stokastiske (uid) variable med* $E(X_i) = \mu$ og $\text{var}(X_i) = \sigma^2$, *der* μ og σ *tolkes som størrelser (som oftest ukjente) i en eller annen populasjon som data,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *trekkes fra.*

Aktuelle estimatorer: $\hat{\mu} = \bar{X}$ og $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ som begge er forventningsrette (jfr avsnittet under regel 6.2 og regel 6.13).

La $\alpha/2$ -kvantilen i $N(0,1)$ - fordelingen betegnes med $z_{\alpha/2}$ (slik at $P(-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$, der $Z \sim N(0,1)$)

La $\alpha/2$ -kvantilen i t_{n-1} - fordelingen betegnes med $t_{n-1,\alpha/2}$ (slik at $P(-t_{n-1,\alpha/2} \le T \le t_{n-1,\alpha/2}) = 1-\alpha$, der $T \sim t_{n-1}$).

Merk at fordelingene t_{n-1} og $N(0,1)$ ligner på hverandre: De er begge entoppet (klokkeformet) og symmetrisk rundt 0. Når n er "stor" (dvs. ≥ 30 omtrent), er forskjellen neglisjerbar. For små n er t_{n-1} karakterisert ved litt tyngre haler enn $N(0,1)$ og litt flatere kurve rundt 0 (jfr. figur 5.26 side 192 i Løvås).

Tabell 1 Konfidensintervall for μ

Situasjon	*Forutsetninger (modell)*	n	σ	*Standardfeil* $\sqrt{\text{var}(\hat{\mu})}$	*Estimert standardfeil*	*Pivotal* $\dfrac{\hat{\mu}-\mu}{SE(\hat{\mu})}$	$1-\alpha$ *KI for* μ	*Konfidens-grad*
1	(1) i tillegg til forutsetningen $X_i \sim N(\mu,\sigma), \quad i=1,2,\ldots,n$	Vilkårlig	Kjent	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Eksakt $1-\alpha$
2	(1) i tillegg til forutsetningen $X_i \sim N(\mu,\sigma), \quad i=1,2,\ldots,n$	Vilkårlig	Ukjent	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$\bar{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	Eksakt $1-\alpha$
3	Bare (1) der X_i er vilkårlig fordelt	n "stor", $n \geq 30$ (til nød ≥ 20)	Ukjent	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	Tilnærmet $1-\alpha$
4	Bare (1) der X_i er vilkårlig fordelt	n liten	Ukjent				**Ikke pensum**	

Merknad 3. Uttrykket "**pivotal**" betegner en stokastisk variabel som avhenger av ukjente parametre i modellen - en variabel som derfor **ikke er observerbar** - men som har **kjent** sannsynlighetsfordeling. Pivotaler er bl.a nyttige ved konstruksjon av konfidensintervaller og tester.

Merknad 4. Siden t_{n-1}-fordelingen er tilnærmet lik $N(0,1)$ for $n \geq 30$, vil forskjellen mellom KI-ene i situasjon 2 og 3 være neglisjerbar når $n \geq 30$.

Tabell 2. Konfidensintervall for σ^2 når $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og normalfordelte med $X_i \sim N(\mu, \sigma)$.

(Hvis en stokastisk variabel, V, er kji-kvadratfordelt (avsnitt 5.9.1) med k frihetsgrader, skriver vi kort: $V \sim \chi_k^2$. p-kvantilen i denne fordelingen kaller Løvås, χ_p, som er det tallet som oppfyller $P(V > \chi_p) = p$. Noen kvantiler finnes i tabell D6. Merk at kji-kvadrat fordelingen ikke er symmetrisk (jfr. figur 5.25 side 190 i Løvås) slik at vi trenger kvantiler i begge ender av fordelingen for å utlede konfidensintervallet. Se merknad 6.)

Modell	*n*	*Estimator*	*Pivotal*	*Nedre konfidensgrense*	*Øvre konfidensgrense*	*Konfidensgrad*
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og identisk fordelte (*uid*) med $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, n$	Vilkårlig	$\hat{\sigma}^2 = S^2$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ (Regel 5.22)	$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}}$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}$	Eksakt $1-\alpha$

Merknad 5. Har vi funnet et KI for populasjonsvariansen, σ^2, kan vi lett finne et for standardavviket, σ, også. Hvis $[A, B]$ er et $1-\alpha$ KI for σ^2 (slik at $P(A \le \sigma^2 \le B) = 1-\alpha$), så vil et $1-\alpha$ KI for σ rett og slett være gitt ved $[\sqrt{A}, \sqrt{B}]$. Dette skyldes at begivenhetene $(A \le \sigma^2 \le B)$ og $(\sqrt{A} \le \sigma \le \sqrt{B})$ er logisk ekvivalente (og derfor like sannsynlige) siden funksjonen $y = \sqrt{x}$ er en voksende funksjon av x. [*Illustrer selv den siste setningen med et diagram over funksjonen* $y = \sqrt{x}$ *!*].

Merknad 6. Utledning av konfidensintervallet for σ^2. (Jfr. avsnitt 6.3.4 i Løvås.) Sett $V = (n-1)S^2/\sigma^2$. I følge regel 5.22 er $V \sim \chi_{n-1}^2$. For kvantilene[1] $\chi_{1-\alpha/2}^2$ og $\chi_{\alpha/2}^2$ har vi i følge definisjonen og det at kji-kvadratfordelingen er kontinuerlig,

---

[1]Hvis generelt V er χ_k^2-fordelt (med k frihetsgrader), er p-kvantilen i Løvås definert som *et tall*, ofte skrevet χ_p^2, som oppfyller $P(V > \chi_p^2) = p$.

$P(V < \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1 - P(V \geq \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1 - P(V > \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1 - (1-\alpha/2) = \alpha/2$ og $P(V > \chi^2_{\alpha/2}) = \alpha/2$. Dermed blir (tegn figur) $P(\chi_{1-\alpha/2} \leq V \leq \chi_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$. Ved innsetting for V får vi dermed

$$1-\alpha = P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2}\right) = P\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \geq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \geq \sigma^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)$$

I den siste likheten har vi bare ordnet om på ulikheten slik at den minste verdien kommer til venstre. Merk også at den andre likheten skyldes at når man tar den inverse av begge sider av en ulikhet mellom positive tall, snur ulikheten rundt (for eksempel $4 > 2 \Leftrightarrow 1/4 < 1/2$).

Regneeksempel. For de $n = 46$ kvinnehøydene (døtrene), $y_1, y_2, \ldots, y_{46}$ vi samlet inn på forelesningen 2. mars 2011, ble estimatet for populasjons-standardavviket, σ, lik $\hat{\sigma}_{obs} = S_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = 5.74065$. Vi ønsker et 95% KI for σ. Som modell bruker vi (1) for de bakenforliggende stokastiske variablene, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{46}$, og antar i tillegg at de er normalfordelte, $Y_i \sim N(\mu, \sigma)$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. (Normalfordelingsantakelsen anses vanligvis for realistisk for høydemålinger i homogene grupper.)

Konfidensgrad 0,95, gir $\alpha = 0,05$ og $\alpha/2 = 0,025$. Vi trenger altså kvantilene $\chi^2_{0,975}$ og $\chi^2_{0,025}$ i kjikvadratfordelingen med $n-1 = 45$ frihetsgrader. Tabell D6 gir $\chi^2_{0,975}$=28,37 og $\chi^2_{0,025} = 65,41$. Ut fra merknad 5 blir 95% konfidensintervallet for σ beregnet til

$$\left[\sqrt{\frac{45S^2}{\chi^2_{0.025}}},\ \sqrt{\frac{45S^2}{\chi^2_{0.975}}}\right]_{obs} = \left[S\sqrt{\frac{45}{65,41}},\ S\sqrt{\frac{45}{28,37}}\right]_{obs} = \left[(0,83)S, (1.26)S\right]_{obs} = \left[4,76,\ 7,23\right]$$

Merk at estimatet $\hat{\sigma}_{obs} = 5,74$ ikke ligger midt i konfidensintervallet (det er altså større usikkerhet til høyre for estimatet enn til venstre). Dette innebærer at begrepet standardfeil ikke kommer inn som noe nyttig begrep her (og blir derfor ikke brukt i forbindelse med estimering av σ eller σ^2), i motsetning til konfidensintervall basert på normalfordelingen eller t-fordelingen som ovenfor.

Merknad 7. Noen ganger finner vi ikke akkurat den fraktilen i tabellen vi er ute etter. For eksempel, anta vi hadde hatt $n = 42$ observasjoner istedenfor 46. Da ville vi ha trengt $\chi^2_{0,975}$ og $\chi^2_{0,025}$ i kji-kvadrat-fordelingen med 41 frihetsgrader som ikke er representert i tabell D6. I så fall ser vi på de to nærmeste fordelingene som er representert:

Frihets-grader	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,025}$
40	24,43	59,34
45	28,37	65,41

På øyemål anslår vi for eksempel $\chi^2_{0,975}$=25,2 og $\chi^2_{0,025} = 60,9$ omtrent for 41 frihetsgrader[2].

[2] "Øyemålsmetoden" er fullt akseptabel til eksamen. Ellers ville lineær interpolasjon (ikke pensum) gi litt bedre resultat. Aller best er å bruke CHIINV-funksjonen i Excel (dersom man har tilgang til Excel) som beregner de to kvantilene nøyaktig til 25,2145… og 60,56057… henholdsvis.

3 Aktuelle modelltyper 2

Tabell 3 Tilnærmet konfidensintervall basert på regel 5.20 (normaltilnærming for binomisk, hypergeometrisk og poisson fordeling)

Modell	*Estimator* $\hat{\theta}$	*Standardfeil* $\sqrt{\text{var}(\hat{\theta})}$	*Estimert standardfeil* $SE(\hat{\theta})$	*Betingelse for akseptabel normal-tilnærmelse*	*Pivotal* $\dfrac{\hat{\theta}-\theta}{SE(\hat{\theta})}$	*Konfidensintervall (konfidensgrad tilnærmet* $1-\alpha$*)* $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} SE(\hat{\theta})$
$X \sim \text{bin}(n,p)$	$\hat{p} = \dfrac{X}{n}$	$\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$	$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	$\text{var}(X) \geq 5$ $(np(1-p) \geq 5$	$\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
$X \sim$ hypergeom. (n, M, N) $(p = M/N)$	$\hat{p} = \dfrac{X}{n}$	$\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n} \cdot \dfrac{N-n}{N-1}}$	$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \cdot \dfrac{N-n}{N-1}}$	$\text{var}(X) \geq 5$	$\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \cdot \dfrac{N-n}{N-1}}} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \cdot \dfrac{N-n}{N-1}}$
$X \sim \text{pois}(t\lambda)$ [3]	$\hat{\lambda} = \dfrac{X}{t}$	$\sqrt{\dfrac{\lambda}{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\hat{\lambda}}{t}}$	$\text{var}(X) \geq 5$ $(t\lambda \geq 5)$	$\dfrac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/t}} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$\hat{\lambda} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{\lambda}}{t}}$

[3] Husk at notasjonen $X \sim \text{pois}(m)$ er valgt slik at det som står på m's plass alltid er lik $E(X)$ (som også er lik $\text{var}(X)$ i poisson-fordelingen). Hvis det for eksempel i en oppgave fremgår at $X \sim \text{pois}(3,7)$, følger automatisk at $E(X) = \text{var}(X) = 3,7$. Av modellen i tabellen følger således at $E(X) = \text{var}(X) = t\lambda$ som impliserer at $\hat{\lambda}$ er forventningsrett siden $E(\hat{\lambda}) = E\left(\dfrac{X}{t}\right) = \dfrac{1}{t} \cdot E(X) = \dfrac{1}{t} \cdot t\lambda = \lambda$. Variansen (lik kvadrert standardfeil) blir $\text{var}(\hat{\lambda}) = \text{var}\left(\dfrac{X}{t}\right) = \dfrac{1}{t^2}\text{var}(X) = \dfrac{1}{t^2} \cdot t\lambda = \dfrac{\lambda}{t}$.

Merknad 7 Merk at de tre KI-ene i tabell 3 samt KI-ene i situasjon 1 og 3 i tabell 1 alle har den generelle formen angitt i regel 6.7 der SE står for standardfeil eller estimert standardfeil dersom $\mathrm{SE}(\hat{\theta})$ avhenger av ukjente parametre. Unntak fra regel 6.7 er gitt i tabell 2 og situasjon 2 under tabell 1. Argumentasjonen fra pivotal-utsagnet til konfidensintervallet er gitt i avsnitt 6.3.1. rett etter regel 6.7.

Merknad 8 I mange KI (jfr tabell 1 og 3) bruker vi altså den estimerte versjonen av standardfeilen (i tilfelle standardfeilen er ukjent) når vi utleder et KI. Det er ikke på noen måte opplagt at vi har lov til dette. Det er rimelig å tenke seg at en slik fremgangsmåte ville kunne ødelegge tilnærmelsen til N(0, 1), noe som ville gjøre konfidensgraden tvilsom. Det at vi ifølge modifisert regel 6.7 **(b)** faktisk "har lov til" å erstatte SE med en estimert versjon uten å berøre konfidensgraden vesentlig, er egentlig ganske overraskende sett i lys av en ofte betydelig usikkerhet i estimeringen av σ. For eksempel for kvinnehøydene i merknad 6 ble konfidensintervallet for σ $[4{,}76,\ 7{,}23]$ som indikerer en ikke ubetydelig usikkerhet Likevel vil etter regel 6.7 **(b)** konfidensgraden for KI-et for μ ikke bli vesentlig berørt om vi bytter ut σ med $\hat{\sigma} = S$ i standardfeilen.

4 Regresjonsmodellen

KI-ene for ukjente parametre i den enkle standard regresjonmodellen med normalfordelte restledd følger samme mønsteret som situasjon 2 i tabell 1, med eneste forskjell at $n-2$ frihetsgrader benyttes i *t*-fordelingen istedenfor $n-1$ som i situasjon 2. KI-et har i alle tilfeller formen

$$\hat{\theta} \pm t_{n-2,\alpha/2} SE(\hat{\theta})$$

og konfidensgraden $1-\alpha$ gjelder eksakt for alle $n \geq 3$. Det du trenger i tillegg er formler for $\hat{\theta}$ og $SE(\hat{\theta})$, som du finner i Løvås kap. 7, eller regresjon-II –notatet på nettet.